

晋江市伟冠双语实验学校初高中数学衔接课程（教师版）

【第一部分】基础知识

1.1 乘法公式（1 课时）

【初中知识回顾】

知识点 1 平方公式

- (1) 平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;
- (2) 完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- (3) 三数和平方公式 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$;

知识点 2 立方公式

- (1) 立方和公式 $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$;
- (2) 立方差公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$;
- (3) 两数和立方公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- (4) 两数差立方公式 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

【小试牛刀】

1. $(a+b)^2 - (a-b)^2 =$ _____
2. $a^2 + b^2 = (a+b)^2 -$ _____
3. 已知 $x+y=17$, $xy=60$, 则 $x^2+y^2 =$ _____

【解析】 1. $4ab$; 2. $2ab$; 3. 169

【例 1】 已知 $x + \frac{1}{x} = 3$, 求: (1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$; (2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

【解析】 $\because x + \frac{1}{x} = 3$, 所以

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$.

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}) = (x + \frac{1}{x})[(x + \frac{1}{x})^2 - 3] = 3(3^2 - 3) = 18$.

归纳总结:

(1) 本题若先从方程 $x + \frac{1}{x} = 3$ 中解出 x 的值后, 再代入代数式求值, 则计算较烦琐.

(2) 本题是根据条件式与求值式的联系, 用“整体代换”的方法计算, 简化了计算.

【练习 1-1】 已知 $x^2 + 3x - 1 = 0$ ，求：(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ；(2) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 。

【解析】 $\because x^2 + 3x - 1 = 0$ ， $\therefore x \neq 0$ ， $\therefore x^2 - 1 = -3x$ ， $\therefore x - \frac{1}{x} = -3$ 。

$$(1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = (-3)^2 + 2 = 11;$$

$$(2) \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = -3 \times (11 + 1) = -36.$$

【练习 1-2】 观察下列各式：

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1;$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1;$$

$$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1 \dots$$

根据上述规律可得： $(x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$

【解析】 $x^{n+1} - 1$

【巩固练习】

1. 填空，使之符合立方和或立方差公式或完全立方公式：

$$(1) \quad (x-3)(\quad) = x^3 - 27 \qquad (2) \quad (2x+3)(\quad) = 8x^3 + 27$$

$$(3) \quad (x+2)^3 = (\quad) \qquad (4) \quad (2x-3y)^3 = (\quad)$$

$$(5) \quad \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{4}b^2 = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)(\quad) \qquad (6) \quad (a+2b-c)^2 = a^2 + 4b^2 + c^2 + (\quad)$$

$$\text{【解析】} \quad (1) \quad x^2 + 3x + 9 \qquad (2) \quad 4x^2 - 6x + 9 \qquad (3) \quad x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(4) \quad 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 \qquad (5) \quad \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b \qquad (6) \quad 4ab - 2ac - 4bc$$

2. 已知 $a + b + c = 4$ ， $ab + bc + ac = 4$ ，则 $a^2 + b^2 + c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解析】 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 8$ 。

3. 若 $x^2 + 2x - 1 = 0$ ，则 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $x^3 - \frac{1}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解析】 $\because x^2 + 2x - 1 = 0$ ， $\therefore x \neq 0$ ， $\therefore x^2 - 1 = -2x$ ， $\therefore x - \frac{1}{x} = -2$ 。

$$(1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = (-2)^2 + 2 = 6;$$

$$(2) \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = -2 \times (6 + 1) = -14.$$

1.2 因式分解（1 课时）

【初中知识回顾】

知识点 1 因式分解

因式分解是代数式的一种重要的恒等变形，它与整式乘法是相反方向的变形．在分式运算、解方程及各种恒等变形中起着重要的作用．

知识点 2 因式分解方法

因式分解的方法较多，除了初中课本涉及到的提取公因式法和公式法（平方差公式和完全平方公式）外，还有公式法（立方和、立方差公式）、十字相乘法 and 分组分解法等等．

十字相乘法（高中常用）

【例 1】把下列各式因式分解：

$$(1) x^2 - 7x + 6 \quad (2) x^2 + 13x + 36 \quad (3) x^2 + xy - 6y^2$$

【解析】(1) $\because 6 = (-1) \times (-6), (-1) + (-6) = -7$

$$\therefore x^2 - 7x + 6 = [x + (-1)][x + (-6)] = (x - 1)(x - 6) .$$

$$(2) \because 36 = 4 \times 9, 4 + 9 = 13$$

$$\therefore x^2 + 13x + 36 = (x + 4)(x + 9)$$

$$(3) x^2 + xy - 6y^2 = (x + 3y)(x - 2y)$$

归纳总结：

1. 拆分二次项系数，竖式排列；
2. 拆分常数项并验证组合，通过交叉相乘后求和验证结果是否等于原式的一次项系数；
3. 横向组合因式.

必须注意，往往要经过尝试，才能确定一个二次三项式能否用十字相乘法分解．

【练习】

1.把下列各式因式分解：

$$(1) 12x^2 - 5x - 2$$

$$(2) 5x^2 + 6xy - 8y^2$$

$$(3) x^2 + 5x - 24$$

$$(4) x^2 - 2x - 15$$

$$(5) (x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12$$

【解析】(1) $12x^2 - 5x - 2 = (3x - 2)(4x + 1)$

(2) $5x^2 + 6xy - 8y^2 = (x + 2y)(5x - 4y)$

(3) $\because -24 = (-3) \times 8, (-3) + 8 = 5$

$\therefore x^2 + 5x - 24 = [x + (-3)](x + 8) = (x - 3)(x + 8)$

(4) $\because -15 = (-5) \times 3, (-5) + 3 = -2$

$\therefore x^2 - 2x - 15 = [x + (-5)](x + 3) = (x - 5)(x + 3)$

(5) $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2)$

$= (x + 3)(x - 2)(x + 2)(x - 1)$

2.把下列各式因式分解:

(1) $x^2 - 3x + 2$

(2) $x^2 + 37x + 36$

(3) $x^2 + 11x - 26$

(4) $x^2 - 6x - 27$

(5) $m^2 - 4mn - 5n^2$

(6) $(a - b)^2 + 11(a - b) + 28$

【解析】 $(x - 2)(x - 1), (x + 36)(x + 1), (x + 13)(x - 2), (x - 9)(x + 3)$

$(x - 9)(x + 3), (m - 5n)(m + n), (a - b + 4)(a - b + 7)$

【第二部分】一元二次函数、方程和不等式

初中	高中
1. 一元二次方程 2. 一元二次函数	1. 一元二次不等式

2.1 一元二次方程 (1 课时)

【初中知识回顾】

知识点 1 一元二次方程的根的判断式

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 用配方法将其变形为: $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

(1) 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 右端是正数, 方程有两个不相等的实数根: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(2) 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 右端是零. 因此, 方程有两个相等的实数根: $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$

(3) 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 右端是负数. 因此, 方程没有实数根.

由于可以用 $b^2 - 4ac$ 的取值情况来判定一元二次方程的根的情况.

因此, 把 $b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式, 表示为:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

知识点 2 一元二次方程的根与系数的关系

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根为: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{(2a)^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

韦达定理: (高中常用)

如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根为 x_1, x_2 ,

$$\text{那么: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

拓展: (高中常用)

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

【小试牛刀】

1. 解一元二次方程的不同方法有哪些?

【解析】因式分解法, 配方法, 求根公式法

2. 已知关于 x 的一元二次方程 $3x^2 - 2x + k = 0$, 根据下列条件, 分别求出 k 的范围:

(1) 方程有两个不相等的实数根;

(2) 方程有两个相等的实数根

(3) 方程有实数根;

(4) 方程无实数根.

【解析】 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times k = 4 - 12k$

$$(1) \quad 4 - 12k > 0 \Rightarrow k < \frac{1}{3}; \quad (2) \quad 4 - 12k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3};$$

$$(3) \quad 4 - 12k \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{1}{3}; \quad (4) \quad 4 - 12k < 0 \Rightarrow k < \frac{1}{3}.$$

一元二次方程的解法

【例 1】 解下列方程：

$$(1) \quad (x+2)(x-3) = 0;$$

$$(2) \quad 3x^2 - 7x = 10;$$

$$(3) \quad x^2 + 4x - 4 = 0.$$

【解析】 (1) $x = -2$ 或 3 ; (2) $x = -1$ 或 $\frac{10}{3}$; (3) $x = -2 - 2\sqrt{2}$ 或 $-2 + 2\sqrt{2}$.

【练习 1】 解下列方程：

$$(1) \quad x^2 - x + \frac{1}{4} = 0;$$

$$(2) \quad -2x^2 + x = 0;$$

$$(3) \quad x^2 - 3x + 4 = 0.$$

【解析】 (1) $x = \frac{1}{2}$; (2) $x = 0$ 或 $\frac{1}{2}$; (3) 无解.

【探究】 上述提到的配方法在高中阶段还会用在什么地方呢？

$$\text{方程 } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (r > 0) \quad \text{①}$$

$$\text{方程 } x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad \text{②}$$

【例 2】 将方程 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 改写成方程①的形式.

【解析】 方程 $x^2 + y^2 - 6x = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9$.

【练习 2】 将下列方程改写成方程①的形式.

$$(1) \quad x^2 + y^2 + 2by = 0;$$

$$(2) x^2 + y^2 - 2ax - 2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 0.$$

【解析】(1) 方程 $x^2 + y^2 + 2by = 0 \Rightarrow x^2 + (y+b)^2 = b^2$;

$$(2) \text{ 方程 } x^2 + y^2 - 2ax - 2\sqrt{3}y + 3a^2 = 0 \Rightarrow (x-a)^2 + (y-\sqrt{3}a)^2 = a^2.$$

一元二次方程的根与系数的关系

【例 3】若 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 2x - 2007 = 0$ 的两个根，试求下列各式的值：

$$(1) x_1^2 + x_2^2; \quad (2) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad (3) (x_1 - 5)(x_2 - 5); \quad (4) |x_1 - x_2|.$$

【解析】：由题意，根据根与系数的关系得： $x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = -2007$

$$(1) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-2)^2 - 2(-2007) = 4018$$

$$(2) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-2}{-2007} = \frac{2}{2007}$$

$$(3) (x_1 - 5)(x_2 - 5) = x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 25 = -2007 - 5(-2) + 25 = -1972$$

$$(4) |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{(-2)^2 - 4(-2007)} = 4\sqrt{502}$$

【练习 3】若 x_1 和 x_2 分别是一元二次方程 $2x^2 + 5x - 3 = 0$ 的两根。

$$(1) \text{ 求 } |x_1 - x_2| \text{ 的值; } (2) \text{ 求 } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \text{ 的值; } (3) x_1^3 + x_2^3.$$

【解析】 $\because x_1$ 和 x_2 分别是一元二次方程 $2x^2 + 5x - 3 = 0$ 的两根， $\therefore x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}, x_1 x_2 = -\frac{3}{2}.$

$$(1) \because |x_1 - x_2|^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4}, \therefore |x_1 - x_2| = \frac{7}{2}.$$

$$(2) \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{25}{4} + 3}{\frac{9}{4}} = \frac{37}{9}.$$

$$(3) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] \\ = \left(-\frac{5}{2}\right) \times \left[\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right] = -\frac{215}{8}.$$

归纳总结：利用根与系数的关系求值，要熟练掌握以下等式变形：

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}, \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2,$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}, \quad x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = x_1x_2(x_1 + x_2),$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \text{ 等等. 韦达定理体现了整体思想.}$$

【课后作业】

1. 解下列方程：

(1) $13 - 4x^2 = 0$;

(2) $(x-3)(x-7) = 0$;

(3) $x^2 - 3x - 10 = 0$;

(4) $-3x^2 + 5x - 4 = 0$.

【解析】 (1) $x = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$; (2) $x = 3$ 或 7 ; (3) $x = -2$ 或 5 ; (4) 无解

2. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (4m+1)x + 2m-1 = 0$.

(1) 求证：不论 m 为任何实数，方程总有两个不相等的实数根；

(2) 若方程的两根为 x_1, x_2 ，且满足 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2}$ ，求 m 的值.

【解析】 (1) $\Delta = 16m^2 + 5 > 0$ (2) $m = -\frac{1}{2}$

3. 已知关于 x 的方程 $(k-1)x^2 + (2k-3)x + k+1 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 k 的取值范围； (2) 是否存在实数 k ，使方程的两实根互为相反数？如果存在，求出 k 的值；如果不存在，请你说明理由.

【解析】 (1) $k < \frac{13}{12}$ 且 $k \neq 1$ (2) 不存在

4. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2(m-2)x + m^2 + 4 = 0$ 有两个实数根，并且这两个实数根的平方和比两个根的积大 21，求 m 的值.

【解析】 解：设 x_1, x_2 是方程的两根，由韦达定理，得

$$x_1 + x_2 = -2(m-2), \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 + 4.$$

$$\because x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 = 21,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2 = 21,$$

$$\text{即 } [-2(m-2)]^2 - 3(m^2 + 4) = 21,$$

$$\text{化简，得 } m^2 - 16m - 17 = 0,$$

解得 $m = -1$, 或 $m = 17$.

当 $m = -1$ 时, 方程为 $x^2 + 6x + 5 = 0$, $\Delta > 0$, 满足题意;

当 $m = 17$ 时, 方程为 $x^2 + 30x + 293 = 0$, $\Delta = 30^2 - 4 \times 1 \times 293 < 0$, 不合题意, 舍去.

综上, $m = 17$.

2.2 二次函数的图象与性质 (1 课时)

【初中知识回顾】

知识点 1 二次函数解析式

二次函数解析式可以表示成以下三种形式:

1. 一般式: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$;
2. 顶点式: $y = a(x + h)^2 + k (a \neq 0)$, 其中顶点坐标是 $(-h, k)$.
3. 交点式: $y = a(x - x_1)(x - x_2) (a \neq 0)$, 其中 x_1, x_2 是二次函数图象与 x 轴交点的横坐标.

我们可以根据题目所提供的条件, 选用一般式、顶点式、交点式这三种表达形式中的某一形式来解题.

知识点 2 二次函数图象与性质

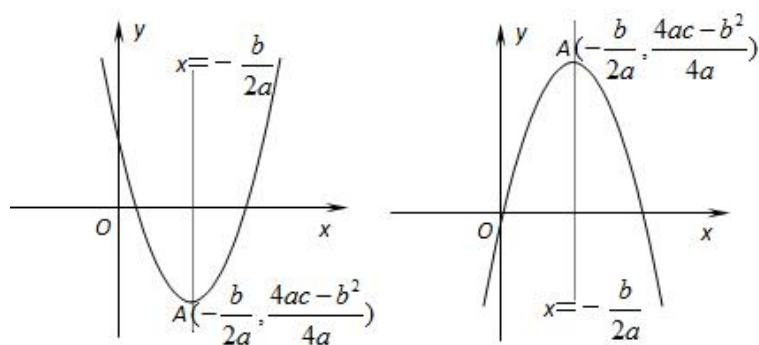
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 是初中函数的主要内容, 也是高中学习的重要基础.

在初中阶段大家已经知道:

当 $a > 0$ 时, 开口向上, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$, 函数在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处取得最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$, 无最大值;

当 $a < 0$ 时, 开口向下, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$, 函数在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处取得最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$, 无最小值.

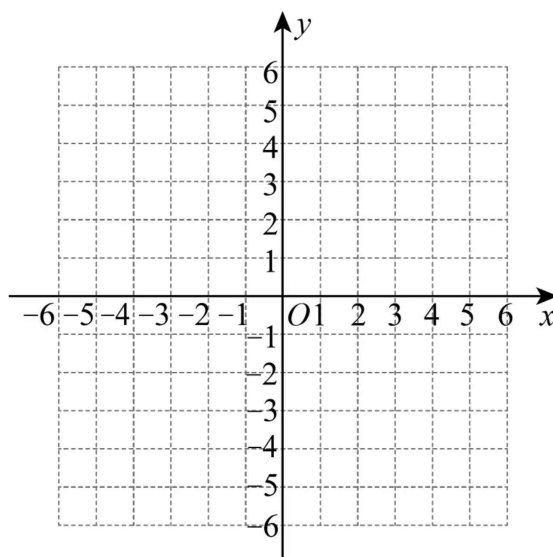
今后解决二次函数问题时, 要善于借助函数图象, 利用数形结合的思想方法解决问题.



【小试牛刀】

1. 在平面直角坐标系中画出 $y = (x+2)(x-3)$ 的图象，并回答以下问题：

- (1) 开口_____；
- (2) 图象与 x 轴是否有交点？_____；
若有，请写出交点坐标_____；
- (3) 对称轴_____；
- (4) 有最_____值，为_____.



二次函数的最值

【例 1】当 $-2 \leq x \leq 2$ 时，求函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的最大值和最小值.

【分析】：作出函数在所给范围的及其对称轴的草图，观察图象的最高点和最低点，由此得到函数的最大值、最小值及函数取到最值时相应自变量 x 的值.

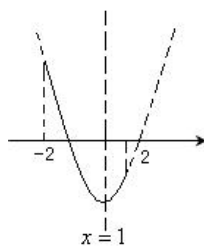
【解析】：方法一：作出函数的图象. 当 $x = 1$ 时， $y_{\min} = -4$ ，当 $x = -2$ 时， $y_{\max} = 5$.

方法二：配方法

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

当 $x = 1$ 时， $y_{\min} = -4$ ，

当 $x = -2$ 时， $y_{\max} = 5$.

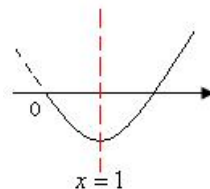


【练习 1-1】当 $x \geq 0$ 时，求函数 $y = -x(2-x)$ 的取值范围.

【解析】方法一：作出函数 $y = -x(2-x) = x^2 - 2x$ 在 $x \geq 0$ 内的图象.

可以看出：当 $x = 1$ 时， $y_{\min} = -1$ ，无最大值.

所以，当 $x \geq 0$ 时，函数的取值范围是 $y \geq -1$.



方法二： $y = -x(2-x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ，当 $x = 1$ 时， $y_{\min} = -1$ ，无最大值. 所以，当 $x \geq 0$ 时，函数的取值范围是 $y \geq -1$.

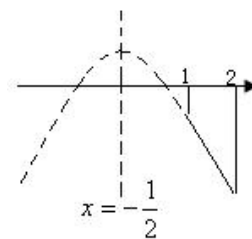
【练习 1-2】 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 求函数 $y = -x^2 - x + 1$ 的最大值和最小值.

【解析】 方法一: 作出函数的图象. 当 $x = 1$ 时, $y_{\max} = -1$,

当 $x = 2$ 时, $y_{\min} = -5$.

方法二: 配方法, $y = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$,

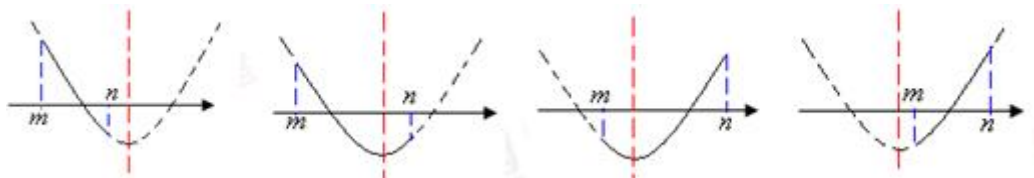
当 $x = 1$ 时, $y_{\max} = -1$, 当 $x = 2$ 时, $y_{\min} = -5$.



归纳总结:

二次函数在自变量 x 的给定范围内, 对应的图象是抛物线上的一段. 那么最高点的纵坐标即为函数的最大值, 最低点的纵坐标即为函数的最小值.

根据二次函数对称轴的位置, 函数在所给自变量 x 的范围的图象形状各异. 下面给出一些常见情况:



【例 2】 当 $t \leq x \leq t+1$ 时, 求函数 $y = x^2 - 2x - 5$ 的最小值 y_{\min} (其中 t 为常数).

【分析】 由于 x 所给的范围随着 t 的变化而变化, 所以需要比较对称轴与其范围的相对位置.

【解析】 函数 $y = x^2 - 2x - 5$ 的对称轴为 $x = 1$. 画出其草图.

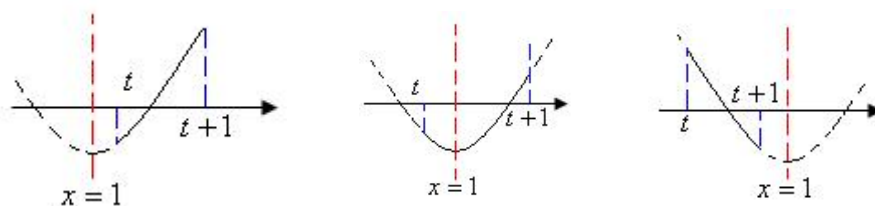
(1) 当对称轴在所给范围左侧. 即 $t > 1$ 时: 当 $x = t$ 时, $y_{\min} = t^2 - 2t - 5$;

(2) 当对称轴在所给范围之间. 即 $t \leq 1 \leq t+1 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ 时:

当 $x = 1$ 时, $y_{\min} = 1^2 - 2 \times 1 - 5 = -6$;

(3) 当对称轴在所给范围右侧. 即 $t+1 < 1 \Rightarrow t < 0$ 时:

当 $x = t+1$ 时, $y_{\min} = (t+1)^2 - 2(t+1) - 5 = t^2 - 6$.



综上所述: $y_{\min} = \begin{cases} t^2 - 6, & t < 0 \\ -6, & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 - 2t - 5, & t > 1 \end{cases}$

【练习 2】 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 求函数 $y = x^2 - tx - 1$ 的最小值 y_{\min} (其中 t 为常数).

【分析】 由于对称轴随着 t 的变化而变化, 所以需要比较对称轴与其范围的相对位置.

【解析】 函数 $y = x^2 - tx - 1$ 的对称轴为 $x = \frac{t}{2}$.

(1) 当对称轴在所给范围左侧. 即 $t < 0$ 时: 当 $x = 0$ 时, $y_{\min} = -1$;

(2) 当对称轴在所给范围之间. 即 $0 \leq \frac{t}{2} \leq 2$, 即 $0 \leq t \leq 4$ 时, 当 $x = \frac{t}{2}$, $y_{\min} = -1 - \frac{t^2}{4}$;

(3) 当对称轴在所给范围右侧. 即 $t > 4$ 时, 当 $x = 2$ 时, $y_{\min} = 3 - 2t$

综上所述: $y_{\min} = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ -1 - \frac{t^2}{4}, & 0 \leq t \leq 4 \\ 3 - 2t, & t > 4 \end{cases}$

【课后作业】

1. 二次函数 $y = x^2 - (m-4)x + 2m - 3$, 当 $m =$ _____ 时, 图象的顶点在 y 轴上;

当 $m =$ _____ 时, 图象的顶点在 x 轴上; 当 $m =$ _____ 时, 图象过原点.

2. 函数 $y = x^2 + 2x + 3$ 在 $m \leq x \leq 0$ 上的最大值为 3, 最小值为 2, 则 m 的取值范围是_____.

3. 已知关于 x 的函数 $y = x^2 + 2ax + 2$ 在 $-5 \leq x \leq 5$ 上.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求函数的最大值和最小值; (2) 当 a 为实数时, 求函数的最大值 y_{\max} .

【解析】 1. 4 14 或 2, $\frac{3}{2}$

2. $-2 \leq m \leq -1$.

3. (1) 当 $x = 1$ 时, $y_{\min} = 1$; 当 $x = -5$ 时, $y_{\max} = 37$.

(2) 当 $a \geq 0$ 时, $y_{\max} = 27 + 10a$; 当 $a < 0$ 时, $y_{\max} = 27 - 10a$.

2.3 一元二次不等式 (1 课时)

【高中知识链接】

知识点 1 一元二次不等式

只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的不等式, 叫做一元二次不等式, 一元二次不等式的一般形式:

① $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$ (其中 a, b, c 均为常数)

② $ax^2 + bx + c < 0 (a \neq 0)$ (其中 a, b, c 均为常数)

③ $ax^2 + bx + c \geq 0 (a \neq 0)$ (其中 a, b, c 均为常数)

④ $ax^2 + bx + c \leq 0 (a \neq 0)$ (其中 a, b, c 均为常数)

知识点 2 一元二次函数的零点

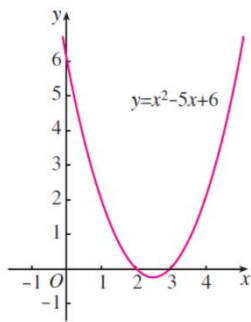
一般地, 对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 我们把使 $ax^2 + bx + c = 0$ 的实数 x 叫做二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的零点.

【小试牛刀】

1. 求二次函数 $y = x^2 - 5x + 6$ 的零点, 并画出其大致图象.

【解析】对于方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 因为 $\Delta > 0$, 所以它有两个实数根. 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

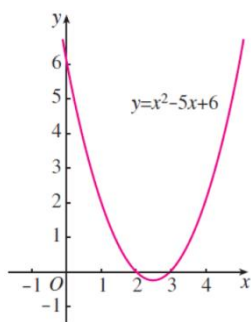
于是, 二次函数 $y = x^2 - 5x + 6$ 的零点是 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.



【例 1】解不等式 $x^2 - 5x + 6 > 0$. (暂不要求写成解集形式)

【解析】对于方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 因为 $\Delta > 0$, 所以它有两个实数根. 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

画出二次函数 $y = x^2 - 5x + 6$ 的图象, 结合图象得不等式 $x^2 - 5x + 6 > 0$ 的解为 $x < 2$ 或 $x > 3$.



【高中知识链接】

知识点3 “三个二次”之间的关系

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的两根为 x_1, x_2 且 $x_1 \leq x_2$, 设 $\Delta = b^2 - 4ac$, 它的解按照 $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ 可分三种情况, 相应地, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象与 x 轴的位置关系也分为三种情况.

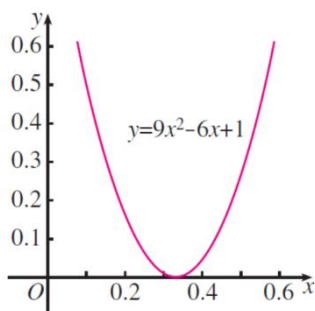
因此我们分三种情况来讨论一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 或 $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集. (暂不要求写成解集形式)

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$	R
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	\emptyset	\emptyset

【例2】解不等式 $9x^2 - 6x + 1 > 0$.

【解析】对于方程 $9x^2 - 6x + 1 = 0$, 因为 $\Delta = 0$, 所以它有两个相等的实数根, 解得 $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$.

画出二次函数 $y = 9x^2 - 6x + 1$ 的图象, 结合图象得不等式 $9x^2 - 6x + 1 > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x \neq \frac{1}{3}\right\}$.

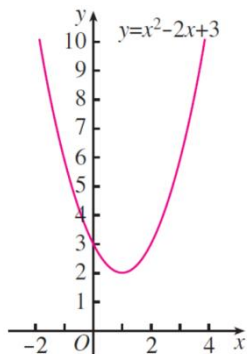


【例3】解不等式 $-x^2 + 2x - 3 > 0$.

【解析】不等式可化为 $x^2 - 2x + 3 < 0$.

因为 $\Delta = -8 < 0$, 所以方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 无实数根.

画出二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 的图象.



结合图象得不等式 $x^2 - 2x + 3 < 0$ 无解. 因此, 原不等式的解集为 \emptyset .

【高中知识链接】

知识点4 一元二次不等式的解法

1. 先看二次项系数是否为正, 若为负, 则将二次项系数化为正数;

2. 写出相应的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$), 计算判别式 Δ :

① $\Delta > 0$ 时, 求出两根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$ (注意灵活运用十字相乘法、配方法);

② $\Delta = 0$ 时, 求根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

③ $\Delta < 0$ 时, 方程无解

3. 根据不等式, 结合图象, 写出不等式的解集.

【练习1】解下列不等式: (暂不要求写成解集形式)

(1) $(x+2)(x-3) > 0$; (2) $3x^2 - 7x \leq 10$;

(3) $x^2 + 4x - 4 < 0$; (4) $x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$;

(5) $-2x^2 + x \leq -3$; (6) $x^2 - 3x + 4 > 0$.

【解析】(1) 解: $(x+2)(x-3) > 0$,

解得 $x > 3$ 或 $x < -2$,

所以不等式的解集是 $\{x | x > 3 \text{ 或 } x < -2\}$;

(2) 由 $3x^2 - 7x \leq 10$, 得 $3x^2 - 7x - 10 \leq 0$,

即 $(3x-10)(x+1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq \frac{10}{3}$,

所以原不等式的解集为: $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{10}{3}\right\}$;

(3) 不等式 $x^2 + 4x - 4 < 0$ 的相应方程 $x^2 + 4x - 4 = 0$ 的两个根为 $x = -2 - 2\sqrt{2}$, $x = -2 + 2\sqrt{2}$,

则不等式 $x^2 + 4x - 4 < 0$ 的解集为 $\{x \mid -2 - 2\sqrt{2} < x < -2 + 2\sqrt{2}\}$;

(4) 不等式 $x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$, 即为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$, 所以原不等式无解;

(5) 不等式 $-2x^2 + x \leq -3$ 即为 $2x^2 - x - 3 \geq 0$,

则 $(2x-3)(x+1) \geq 0$, 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq \frac{3}{2}$,

所以原不等式的解集为 $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq \frac{3}{2}\}$;

(6) $x^2 - 3x + 4 > 0$ 其相应方程 $x^2 - 3x + 4 = 0$ 的判别式为 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 4 = -7 < 0$,

所以不等式 $x^2 - 3x + 4 > 0$ 的解集为 \mathbf{R} .

【课后作业】(暂不要求写成解集形式)

1. 解下列不等式:

(1) $13 - 4x^2 > 0$; (2) $(x-3)(x-7) < 0$;

(3) $x^2 - 3x - 10 > 0$; (4) $-3x^2 + 5x - 4 > 0$.

【解析】(1) 原不等式等价于 $x^2 < \frac{13}{4}$, 即 $\left(x + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) < 0$, 所以原不等式的解集是

$$\left\{x \mid -\frac{\sqrt{13}}{2} < x < \frac{\sqrt{13}}{2}\right\};$$

(2) 原不等式的解集是 $\{x \mid 3 < x < 7\}$;

(3) 原不等式等价于 $(x+2)(x-5) > 0$, 所以原不等式的解集是 $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 5\}$;

(4) 原不等式等价于 $3x^2 - 5x + 4 < 0$, $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 4 = -23 < 0$, 则原不等式的解集是 \emptyset .

2. 一家车辆制造厂引进了一条摩托车整车装配流水线，这条流水线生产的摩托车数量 x （单位：辆）与创造的价值 y （单位：元）之间有如下的关系：

$$y = -2x^2 + 220x.$$

若这家工厂希望在一个星期内利用这条流水线创收 6000 元以上，则在一个星期内大约应该生产多少辆摩托车？

【解析】设这家工厂在一个星期内大约应该利用这条流水线生产 x 辆摩托车，根据题意，得

$$-2x^2 + 220x > 6000.$$

移项整理，得 $x^2 - 110x + 3000 < 0$.

对于方程 $x^2 - 110x + 3000 = 0$ ， $\Delta = 100 > 0$ ，方程有两个实数根 $x_1 = 50$ ， $x_2 = 60$

画出二次函数 $y = x^2 - 110x + 3000$ 的图象（图 2.3-6），结合图象得不等式 $x^2 - 110x + 3000 < 0$ 的解集为 $\{x \mid 50 < x < 60\}$ ，

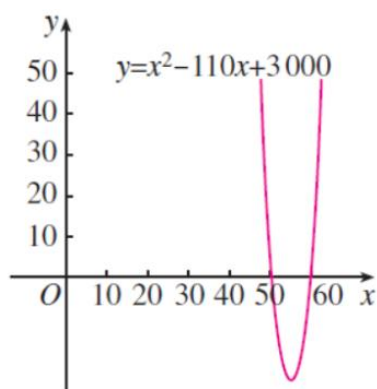


图 2.3-6

从而原不等式的解集为 $\{x \mid 50 < x < 60\}$.

因为 x 只能取整数值，所以当这条流水线在一周内生产的摩托车数量在 51~59 辆时，这家工厂能够获得 6000 元以上的收益.

2.4 分式不等式 (1 课时)

【高中知识链接】

知识点 1 分式不等式

与分式方程类似, 像 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (其中 $f(x), g(x)$ 为整式且 $g(x) \neq 0$) 这样, 分母含有未知数的不等式称为分式不等式.

知识点 2 分式不等式的解法

移项化零: 将分式不等式右边化为 0;

$$\textcircled{1} \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$$

$$\textcircled{2} \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$\textcircled{3} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

(暂不要求写成解集形式)

【例 1】 不等式 $\frac{2-x}{x+1} > 0$ 的解是_____.

【解析】 $\frac{2-x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2,$

故答案为: $\{x | -1 < x < 2\}$

【练习 1】 (1) 不等式 $\frac{x-1}{x+2} > 0$ 的解是_____.

【解析】 根据分式不等式解法可知 $\frac{x-1}{x+2} > 0$ 等价于 $(x-1)(x+2) > 0,$

由一元二次不等式解法可得 $x > 1$ 或 $x < -2$;

所以不等式 $\frac{x-1}{x+2} > 0$ 的解集为 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -2\}.$

故答案为: $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -2\}$

(2) 不等式 $\frac{x-2}{x+4} < 0$ 的解是_____.

【解析】 由 $\frac{x-2}{x+4} < 0,$ 得 $(x-2)(x+4) < 0,$

解得 $-4 < x < 2,$

所以原不等式的解集为 $\{x|-4 < x < 2\}$.

【例 2】 不等式 $\frac{x-1}{x-3} \leq 0$ 的解是_____.

【解析】 由 $\frac{x-1}{x-3} \leq 0$ 可得 $\begin{cases} (x-1)(x-3) \leq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $1 \leq x < 3$.

故原不等式的解集为 $\{x|1 \leq x < 3\}$.

故答案为: $\{x|1 \leq x < 3\}$.

【练习 2】 (1) 不等式 $\frac{x-4}{3+2x} \leq 0$ 的解是_____.

【解析】 $\frac{x-4}{3+2x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(2x+3) \leq 0 \\ 2x+3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x \leq 4$,

即不等式 $\frac{x-4}{3+2x} \leq 0$ 的解集是 $\{x|-\frac{3}{2} < x \leq 4\}$

故答案为: $\{x|-\frac{3}{2} < x \leq 4\}$.

(2) 不等式 $\frac{2x+3}{x-1} \geq 1$ 的解是_____.

【解析】 $\frac{2x+3}{x-1} \geq 1$, 即 $\frac{2x+3}{x-1} - 1 \geq 0, \frac{x+4}{x-1} \geq 0$, 等价于 $\begin{cases} (x+4)(x-1) \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $x > 1$ 或 $x \leq -4$.

【巩固练习】

1. 解下列不等式: (暂不要求写成解集形式)

(1) $\frac{5}{x} > 1$

(2) $\frac{x-3}{x+7} < 0$

(3) $\frac{2x-3}{x+1} < 0$

(4) $\frac{x+3}{x^2-x+1} \geq 0$

(5) $\frac{1}{x+2} \leq 3$

(6) $\frac{2x-1}{x+2} \geq 3$

【解析】 (1) $\frac{5-x}{x} > 0 \Rightarrow x(x-5) < 0 \Rightarrow 0 < x < 5$, 所以原不等式的解集为 $\{x|0 < x < 5\}$.

(2) 解法 1: 化为两个不等式组来解:

$$\because \frac{x-3}{x+7} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x+7 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-3 < 0 \\ x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < x < 3,$$

∴ 原不等式的解集是 $\{x | -7 < x < 3\}$.

解法 2：类似于一元二次不等式的解法，运用“符号法则”将之化为两个一元一次不等式组处理；或者因为两个数(式)相除异号，那么这两个数(式)相乘也异号，可将分式不等式直接转化为整式不等式求解。

$$\because \frac{x-3}{x+7} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+7) < 0 \\ x+7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < x < 3,$$

∴ 原不等式的解集是 $\{x | -7 < x < 3\}$.

(3) 原不等式可化为： $(2x-3)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{3}{2}$ ，所以原不等式的解集为 $\{x | -1 < x < \frac{3}{2}\}$.

(4) $\because x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ ，原不等式可化为： $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ ，所以原不等式的解集为 $\{x | x \geq -3\}$.

(5) 原不等式可化为：

$\frac{1}{x+2} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{-3x-5}{x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{3x+5}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} (3x+5)(x+2) \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x < -2 \text{ 或 } x \geq -\frac{5}{3}$ ，所以原不等式的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq -\frac{5}{3}\}$.

(6) $\frac{2x-1}{x+2} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{x+7}{x+2} \leq 0 \Rightarrow -7 \leq x < -2$ ，所以原不等式的解集为 $\{x | -7 \leq x < -2\}$.

【第三部分】函数

初中	高中
1. 一次函数 2. 反比例函数 3. 二次函数	1. 幂函数 2. 指数函数 3. 对数函数 4. 三角函数

3.1 一次函数与反比例函数（1 课时）

【初中知识回顾】

知识点 1 一次函数

形如 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的函数叫做一次函数.

(1) 它的图象是一条斜率为 k , 过点 $(0, b)$ 的直线.

(2) 性质

初中	高中
① $k > 0 \Leftrightarrow y$ 随 x 的增大而增大	① $k > 0 \Leftrightarrow$ 是增函数
② $k < 0 \Leftrightarrow y$ 随 x 的增大而减小	② $k < 0 \Leftrightarrow$ 是减函数

知识点 2 不等式 $ax > b$ 的解的情况:

(1) 当 $a > 0$ 时, $x > \frac{b}{a}$;

(2) 当 $a < 0$ 时, $x < \frac{b}{a}$;

(3) 当 $a = 0$ 时, i) 若 $b < 0$, 则取所有实数; ii) 若 $b \geq 0$, 则无解.

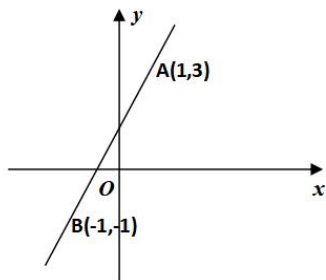
类似地, 请同学们自行分析不等式 $ax < b$ 的解的情况.

知识点 3 反比例函数

反比例函数	$y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$	
	$k > 0$	$k < 0$
图象		
性质		

【小试牛刀】

1. 已知一次函数的图象如图，则它的表达式为 $y=$ _____.



【解析】 $y = 2x + 1$

2. 已知反比例函数的图象经过点 $(2, -3)$ ，则它的表达式为 $y=$ _____.

【解析】 $y = \frac{-6}{x}$

【例 1】画出 $y = |x - 1|$ 的图象

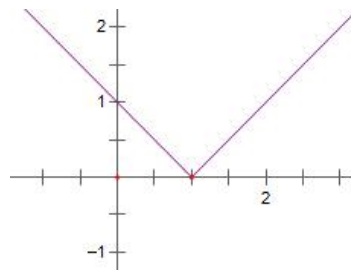
【解析】（1）关键点是 $x = 1$ ，此点又称为界点；

（2）接着是要去绝对值

当 $x \leq 1$ 时， $y = 1 - x$ ；当 $x > 1$ 时， $y = x - 1$ 。

（3）图象如右图

说明：此题还可以考虑该图象可由 $y = |x|$ 的图象向右平移一个单位后得到



【练习 1】画出 $y = |x - 1| + 2|x - 2|$ 的图象

【解析】（1）关键点是 $x = 1$ 和 $x = 2$

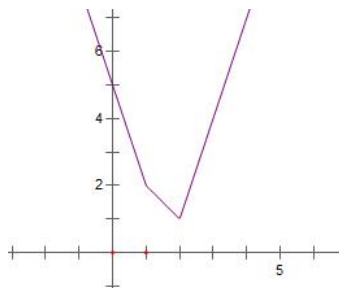
（2）去绝对值

当 $x \leq 1$ 时， $y = 5 - 3x$ ；

当 $1 < x < 2$ 时， $y = 3 - x$ ；

当 $x \geq 2$ 时， $y = 3x - 5$ 。

（3）图象如右图所示。



【练习 2】画出函数 $y = -x^2 + 2|x| + 3$ 的图象

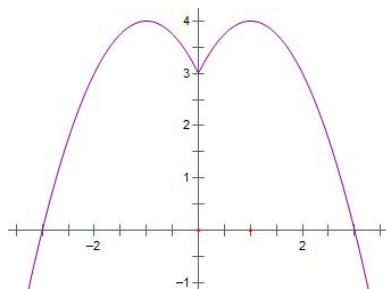
【解析】 (1) 关键点是 $x = 0$

(2) 去绝对值:

当 $x \geq 0$ 时, $y = -x^2 + 2x + 3$;

当 $x < 0$ 时, $y = -x^2 - 2x + 3$

(3) 可作出图象如右图



【例 2】 (1) 说明函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象可由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象经过怎样的平移变换而得到, 并指出它的对称中心.

【解析】 向左平移一个单位长度, 对称中心 $(-1, 0)$

(2) 说明函数 $y = \frac{3x}{x+1}$ 的图象可由函数 $y = \frac{-3}{x}$ 的图象经过怎样的平移变换而得到, 并指出它的对称中心.

【解析】 向左平移一个单位, 再向上平移三个单位, 对称中心为 $(-1, 3)$

【练习 2】 (1) 画出函数 $y = \frac{x}{1+x}$ 的大致图象, 并根据图象求函数在 $-3 \leq x \leq -2$ 上的最大值与最小值.

(2) 画出函数 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的大致图象, 并根据图象求函数在 $-3 \leq x \leq -2$ 上的最大值与最小值.

【解析】 (1) 分离常数得: $y = 1 + \frac{-1}{1+x}$, 结合图象, 在 $-3 \leq x \leq -2$ 上 y 随 x 的增大而增大, 故 $x = -3$ 时 $y_{\min} = \frac{3}{2}$, $x = -2$ 时 $y_{\max} = 2$

(2) 分离常数得: $y = -1 + \frac{2}{x+1}$, 结合图象, 在 $-3 \leq x \leq -2$ 上 y 随 x 的增大而减小,

故 $x = -2, y_{\max} = -3$; $x = -3, y_{\min} = -2$

【拓展练习】 画出函数 $y = |x^2 - 3x + 2|$ 的图象

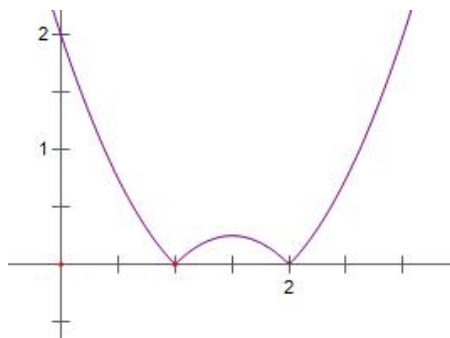
【解析】 (1) 关键点是 $x = 1$ 和 $x = 2$

(2) 去绝对值:

当 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$ 时, $y = x^2 - 3x + 2$;

当 $1 < x < 2$ 时, $y = -x^2 + 3x - 2$

(3) 可作出图象如右图



3.2 从分式、根式的意义到函数的定义域 (1 课时)

【初中知识回顾】

知识点 1 分式的意义与性质

形如 $\frac{A}{B}$ 的式子, 若 B 中含有字母, 且 $B \neq 0$, 则称 $\frac{A}{B}$ 为分式.

当 $M \neq 0$ 时, 分式 $\frac{A}{B}$ 具有下列性质: $\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}$; $\frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}$.

知识点 2 二次根式的概念

一般地, 形如 $\sqrt{a} (a \geq 0)$ 的代数式叫做二次根式.

知识点 3 二次根式性质

$$(1) (\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$$

$$(2) \sqrt{a^2} = |a|$$

$$(3) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$$

$$(4) \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} (a > 0, b \geq 0)$$

二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的意义 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

【小试牛刀】

$$1. \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$2. \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$3. \sqrt{(1-x)^2} + \sqrt{(2-x)^2} \quad (x \geq 1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$4. \text{代数式 } \frac{1}{1+\frac{1}{x+1}} \text{ 有意义, 则 } x \text{ 需要满足的条件是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】1. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{1-3} = \sqrt{3}-2$

2. 原式 $= |\sqrt{3}-2| + |\sqrt{3}-1| = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1$

$$3. \text{原式} = |x-1| + |x-2| = \begin{cases} (x-1) + (x-2) = 2x-3 & (x > 2) \\ (x-1) - (x-2) = 1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$4. x \neq -1 \text{ 且 } x \neq -2$$

【高中知识链接】

知识点 1 函数的概念（了解）

设 A, B 是非空数集，如果按照某种对应关系 f ，使对于集合 A 中任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记法为： $y=f(x)$ ， $x \in A$ 。

知识点 2 定义域

x 叫做自变量， x 的取值范围 A 叫做函数的定义域。

【例 1】求下列函数的定义域：（暂不要求写成集合形式）

$$(1) y = \frac{1}{x+1} - \sqrt{1-x};$$

$$(2) y = \frac{\sqrt{5-x}}{|x|-3}.$$

【提示】各代数式有意义时，自变量 x 的取值范围。

①分式的分母不为 0；②偶次根式的被开方数非负；③ $y=x^0$ 要求 $x \neq 0$ ；

【解析】(1) 要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足 $\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ 1-x \geq 0. \end{cases}$

解得 $x \leq 1$ 且 $x \neq -1$ ，

即函数定义域为 $\{x | x \leq 1, \text{ 且 } x \neq -1\}$ 。

(2) 要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足 $\begin{cases} 5-x \geq 0, \\ |x|-3 \neq 0, \end{cases}$

解得 $x \leq 5$ 且 $x \neq \pm 3$ ，

即函数定义域为 $\{x | x \leq 5, \text{ 且 } x \neq \pm 3\}$ 。

【练习 1-1】求下列函数的定义域：（暂不要求写成集合形式）

$$(1) y = 2 + \frac{3}{x-2};$$

$$(2) y = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x-1};$$

$$(3) y = (x-1)^0 + \sqrt{\frac{2}{x+1}}.$$

【解析】(1) 当且仅当 $x-2 \neq 0$ ，即 $x \neq 2$ 时，函数 $y = 2 + \frac{3}{x-2}$ 有意义，所以这个函数的定义域为 $\{x | x \neq 2\}$ 。

(2)函数有意义, 当且仅当 $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$ 解得 $1 \leq x \leq 3$, 所以这个函数的定义域为 $\{x|1 \leq x \leq 3\}$.

(3)函数有意义, 当且仅当 $\begin{cases} x-1 \neq 0, \\ \frac{2}{x+1} \geq 0, \\ x+1 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $x > -1$, 且 $x \neq 1$,

所以这个函数的定义域为 $\{x|x > -1, \text{ 且 } x \neq 1\}$.

【练习 1-2】 画出下列函数的图象, 并说出函数中自变量 x 的取值范围 (定义域) 和因变量 y 的取值范围 (值域):

(1) $y = 3x$;

(2) $y = \frac{8}{x}$;

(3) $y = |-4x + 5|$;

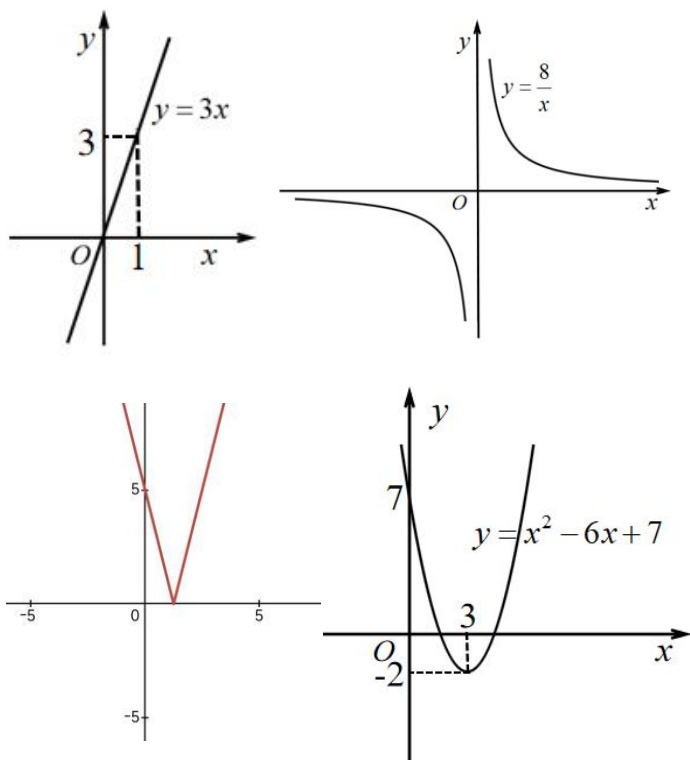
(4) $y = x^2 - 6x + 7$.

【解析】 (1) 一次函数 $y = 3x$ 的图形如图所示, 定义域为 R , 值域为 R .

(2) 反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图形如图所示, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(3) 一次函数 $y = |-4x + 5|$ 的图形如图所示, 定义域为 R , 值域为 $[0, +\infty)$.

(4) 二次函数 $y = x^2 - 6x + 7$ 的图形如图所示, 定义域为 R , 值域为 $[-2, +\infty)$.



【例 2】若函数 $y=\sqrt{mx^2+mx+1}$ 的定义域为一切实数，则实数 m 的取值范围是_____.

【解析】由题意得 $mx^2+mx+1\geq 0$ ，①当 $m=0$ 时， $1\geq 0$ 恒成立；

②当 $m\neq 0$ 时，则 $\begin{cases} m>0, \\ \Delta = m^2 - 4m \leq 0, \end{cases}$ 解得 $0<m\leq 4$.

综上 $0\leq m\leq 4$.

【练习 2】若函数 $y=\sqrt{ax^2+abx+b}$ 的定义域为 $\{x|1\leq x\leq 2\}$ ，则 $a+b$ 的值为_____.

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为不等式 $ax^2+abx+b\geq 0$ 的解集，

不等式 $ax^2+abx+b\geq 0$ 的解集 $\{x|1\leq x\leq 2\}$,

则 $\begin{cases} a<0, \\ 1+2=-\frac{b}{a}, \\ 1\times 2=\frac{b}{a} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\frac{3}{2}, \\ b=-3 \end{cases}$ $\therefore a+b=-\frac{9}{2}$.

【第四部分】集合

4.1 集合的概念（1 课时）

初中	高中
实数的分类	数集
$\begin{array}{l} \text{实数} \begin{cases} \text{有理数} \begin{cases} \text{整数} \begin{cases} \text{正整数} \\ 0 \\ \text{负整数} \end{cases} \\ \text{分数} \begin{cases} \text{正分数} \\ \text{负分数} \end{cases} \end{cases} \begin{matrix} \text{有限小数} \\ \text{或无限循} \\ \text{环小数} \end{matrix} \\ \text{无理数} \begin{cases} \text{正无理数} \\ \text{负无理数} \end{cases} \begin{matrix} \text{无限不循} \\ \text{环小数} \end{matrix} \end{cases}$	<p>数学中一些常用的数集及其记法</p> <p>全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 \mathbf{N};</p> <p>全体正整数组成的集合称为正整数集,记作 \mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}_+;</p> <p>全体整数组成的集合称为整数集,记作 \mathbf{Z};</p> <p>全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 \mathbf{Q};</p> <p>全体实数组成的集合称为实数集,记作 \mathbf{R}.</p>

【探究一】集合的含义

1.看下面的例子：

- (1) 1~10 之间的所有偶数；
- (2) 立德中学今年入学的全体高一学生；
- (3) 所有的正方形；

- (4) 到直线 l 的距离等于定长 d 的所有的点;
- (5) 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的所有实数根;
- (6) 地球上的四大洋.

例 (1) 中, 我们把 1~10 之间的每一个偶数作为元素, 这些元素的全体就是一个集合; 同样地, 例 (2) 中, 把立德中学今年入学的每一位高一学生作为元素, 这些元素的全体也是一个集合.

一般地, 我们把研究的对象统称为**元素**, 把一些元素组成的总体叫做**集合** (简称为**集**). 给定的集合, 它的元素必须是**确定的**.

思考:

上面的例 (3) 到例 (6) 也都能组成集合吗? 它们的元素分别是什么?

一个给定集合中的元素是**互不相同**的, 也就是说, 集合中的元素是不重复出现的. 只要构成两个集合的元素是一样的, 我们就称这两个集合是**相等**的.

我们通常用大写拉丁字母 A, B, C, \dots 表示集合, 用小写拉丁字母 a, b, c, \dots 表示集合中的元素.

如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$; 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于集合 A , 记作 $a \notin A$.

数学中一些常用的数集及其记法
全体非负整数组成的集合称为非负整数集 (或自然数集), 记作 \mathbf{N} ;
全体正整数组成的集合称为正整数集, 记作 \mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}_+ ;
全体整数组成的集合称为整数集, 记作 \mathbf{Z} ;
全体有理数组成的集合称为有理数集, 记作 \mathbf{Q} ;
全体实数组成的集合称为实数集, 记作 \mathbf{R} .

【练习 1】 判断下列元素的全体是否组成集合, 并说明理由:

- (1) 与定点 A, B 等距离的点; (2) 高中学生中的游泳能手.

【解析】 (1) 与定点 A, B 等距离的点可以组成集合, 因为这些点是确定的.

- (2) 高中学生中的游泳能手不能组成集合, 因为组成它的元素是不确定的.

【练习 2】 用符号“ \in ”或“ \notin ”填空:

0 _____ \mathbf{N} ; -3 _____ \mathbf{N} ; 0.5 _____ \mathbf{Z} ; $\sqrt{2}$ _____ \mathbf{Z} ; $\frac{1}{3}$ _____ \mathbf{Q} ; π _____ \mathbf{R} .

【解析】 0 是自然数, 则 $0 \in \mathbf{N}$; -3 不是自然数, 则 $-3 \notin \mathbf{N}$; $0.5, \sqrt{2}$ 不是整数, 则 $0.5 \notin \mathbf{Z}, \sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$;

$\frac{1}{3}$ 是有理数, 则 $\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$; π 是无理数, 则 $\pi \in \mathbf{R}$

故答案为: (1) \in ; (2) \notin ; (3) \notin ; (4) \notin ; (5) \in ; (6) \in

【探究二】集合的表示方法

从上面的例子看到，我们可以用自然语言描述一个集合.除此之外，还可以用什么方式表示集合呢？

列举法

“地球上的四大洋”组成的集合，可以表示为 {太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋}；

“方程 $(x+1)(x+2)=0$ 的所有根”组成的集合可以表示为 $\{-1,-2\}$.

像这样把集合的元素一一列举出来，并用花括号“{ }”括起来表示集合的方法叫做列举法.

注意：(1)大括号不能缺失，元素中间用逗号隔开；

(2) 元素按一定的顺序列举，如：从小到大等.

【例 1】用列举法表示下列集合：

(1) 小于 10 的所有自然数组成的集合；

(2) 方程 $x^2 = x$ 的所有实数根组成的集合.

【解析】(1) 设小于 10 的所有自然数组成的集合为 A ，那么 $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(2) 设方程 $x^2 = x$ 的所有实数根组成的集合为 B ，那么 $B = \{0,1\}$.

由于元素完全相同的两个集合相等，而与列举的顺序无关，因此一个集合可以有不同的列举方法.例如，

例 1 (1) 的集合还可以写成 $A = \{9,8,7,6,5,4,3,2,1,0\}$ 等.

思考:

(1) 你能用自然语言描述集合 $\{0,3,6,9\}$ 吗？

(2) 你能用列举法表示不等式 $x - 7 < 3$ 的解集吗？

描述法

不能用列举法表示不等式 $x - 7 < 3$ 的解集，但是可以看出，这个集合中的元素满足性质：

①集合中的元素都小于 10；② 集合中的元素都是实数.

这个集合可以通过描述其元素性质的方法来表示，写作：

$$\{x \mid x < 10, x \in \mathbf{R}\}.$$

所有奇数的集合可以表示为 $\{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ ，或 $\{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$.

思考：偶数的集合怎样表示？

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$$

一般地, 设 A 是一个集合, 我们把集合 A 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为 $\{x \in A \mid p(x)\}$, 这种表示集合的方法称为描述法.

【例 2】 试分别用列举法和描述法表示下列集合.

(1) 方程 $x^2-2=0$ 的所有实数根组成的集合.

(2) 由大于 10 小于 20 的所有整数组成的集合.

【解析】(1) 设方程 $x^2-2=0$ 的实数根为 x , 并且满足条件 $x^2-2=0$, 因此, 用描述法表示为 $A=\{x \in \mathbf{R} \mid x^2-2=0\}$.

方程 $x^2-2=0$ 有两个实数根为 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$, 因此, 用列举法表示为 $A=\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

(2) 设大于 10 小于 20 的整数为 x , 它满足条件 $x \in \mathbf{Z}$, 且 $10 < x < 20$, 因此, 用描述法表示为

$B=\{x \in \mathbf{Z} \mid 10 < x < 20\}$.

大于 10 小于 20 的整数有 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 因此, 用列举法表示为

$B=\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$.

思考: 举例说明, 用自然语言、列举法和描述法表示集合时各自的特点.

自然语言描述集合简单易懂、生活化; 列举法的特点每个元素一一列举出来, 非常直观明显的表示元素, 当元素有限或者元素有规律性的时候, 是常采用的方法; 描述法表示的集合中元素具有明显的共同特征, 集合中的元素基本是无限的, 这是比较常用的集合表示法.

【练习 3】 用适当的方法表示下列集合:

(1) 由方程 $x^2-9=0$ 的所有实数根组成的集合;

(2) 一次函数 $y=x+3$ 与 $y=-2x+6$ 图象的交点组成的集合;

(3) 不等式 $4x-5 < 3$ 的解集.

【解析】(1) $x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$, 则该方程所有实数根组成的集合为 $\{-3, 3\}$;

(2) 由 $\begin{cases} y=x+3 \\ y=-2x+6 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$, 则图象的交点组成的集合为 $\{(1, 4)\}$;

(3) 不等式 $4x-5 < 3$ 可化为 $x < 2$, 则该集合为 $\{x \mid x < 2\}$.

【知识梳理】

一、集合的基本概念

1. 元素与集合的概念

(1) 把研究对象统称为_____, 通常用_____表示.

(2) 把一些元素组成的总体叫做_____ (简称为集), 通常用_____表示.

2. 集合中元素三个特征: ①_____ ②_____ ③_____

3.集合相等_____

4. 元素与集合的关系:

(1)如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a _____ A

(2)如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a _____ A

5. 常用的数集及其符号表示:

非负整数集(自然数集): 记作_____

正整数集: 记作_____

整数集: 记作_____

有理数集: 记作_____

实数集: 记作_____

二、集合的表示方法

1. 列举法:

2. 描述法:

【课后作业】

1. 用符号“ \in ”或“ \notin ”填空:

(1) 设 A 为所有亚洲国家组成的集合, 则

中国_____ A , 美国_____ A , 印度_____ A , 英国_____ A ;

(2) 若 $A = \{x | x^2 = x\}$, 则 -1 _____ A ;

(3) 若 $B = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, 则 3 _____ B ;

(4) 若 $C = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 10\}$, 则 8 _____ C , 9.1 _____ C .

【解析】(1) 根据国家的地理位置直接得到答案: 中国 $\in A$, 美国 $\notin A$, 印度 $\in A$, 英国 $\notin A$;

(2) $A = \{x | x^2 = x\} = \{0, 1\}$, 故 $-1 \notin A$;

(3) $B = \{x | x^2 + x - 6 = 0\} = \{2, -3\}$, 故 $3 \notin A$;

(4) $C = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 故 $8 \in A, 9.1 \notin A$;

故答案为: (1) \in, \notin, \in, \notin ; (2) \notin ; (3) \notin ; (4) \in, \notin

2. 用列举法表示下列集合:

(1) 大于 1 且小于 6 的整数; (2) $A = \{x | (x-1)(x+2) = 0\}$; (3) $B = \{x \in \mathbf{Z} | -3 < 2x-1 < 3\}$.

【解析】(1) $\{2, 3, 4, 5\}$ (2) $A = \{1, -2\}$ (3) $B = \{0, 1\}$

3. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 二次函数 $y = x^2 - 4$ 的函数值组成的集合；(2) 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的自变量组成的集合；

(3) 不等式 $3x \geq 4 - 2x$ 的解集.

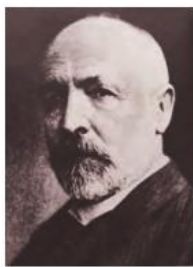
【解析】(1) $\{y \mid y = x^2 - 4, x \in R\} = \{y \mid y \geq -4\}$.

(2) 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的自变量为 x , \therefore 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的自变量组成的集合为 $\{x \mid x \neq 0\}$.

(3) 由 $3x \geq 4 - 2x$, 得 $x \geq \frac{4}{5}$, \therefore 不等式 $3x \geq 4 - 2x$ 的解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{4}{5}\right\}$.

【拓广探索】

集合论是德国数学家康托尔于 19 世纪末创立的. 当时, 康托尔在解决涉及无限量研究的数学问题时, 越过“数集”限制, 提出了一般性的“集合”概念. 关于集合论, 希尔伯特赞誉其为“数学思想的惊人的产物, 在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”, 罗素描述其为“可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”. 请你查阅相关资料, 用简短的报告阐述你对这些评价的认识.



康托尔 (Georg Cantor, 1845—1918)

4.2 集合间的基本关系 (1 课时)

初中	高中
实数间的关系	集合间的关系
$5=5$ $5<7$ $5>3$	相等关系 包含关系

观察下面几个例子, 类比实数之间的相等关系、大小关系, 你能发现下面两个集合之间的关系吗?

(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(2) C 为立德中学高一 (2) 班全体女生组成的集合, D 为这个班全体学生组成的集合;

(3) $E = \{x \mid x \text{ 是两条边相等的三角形}\}$, $F = \{x \mid x \text{ 是等腰三角形}\}$.

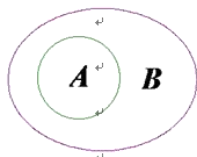
【探究一】子集

1. 集合与集合的关系

(1) 一般地, 对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素, 我们就说这两个集合有包含关系, 称集合 A 为 B 的子集.

记作: $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$)

读作: A 包含于 B (或 B 包含 A).



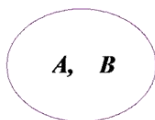
图示:

【探究二】集合相等

(2) 一般地, 如果两个集合所含的元素完全相同 ($A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$), 那么我们称这两个集合相等.

记作: $A = B$

读作: A 等于 B .



图示:

【探究三】真子集

(3) 如果集合 $A \subseteq B$, 存在元素 $x \in B$ 且 $x \notin A$, 则称集合 A 是集合 B 的真子集.

记作: $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$)

读作: A 真包含于 B (或 B 真包含 A)

【探究四】空集

我们知道, 方程 $x^2+1=0$ 没有实数根, 所以方程 $x^2+1=0$ 的实数根组成的集合中没有任何元素.

一般地, 我们把不含有任何元素的集合称为空集, 记作: \emptyset .

规定: 空集是任何集合的子集.

【结论】

(1) 任何一个集合是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$. (类比 $a \leq a$)

(2) 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$. (类比 $a \leq b, b \leq c$ 则 $a \leq c$)

【例 1】 写出集合 $\{a, b\}$ 的所有子集, 并指出哪些是它的真子集.

【解析】 集合 $\{a, b\}$ 的所有子集为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$. 真子集为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}$.

【结论】

(3) 空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集.

(4) 一般地, 一个集合元素若为 n 个, 则其子集数为 2^n 个, 其真子集数为 $2^n - 1$ 个, 特别地, 空集的子集个数为 1, 真子集个数为 0.

【例 2】 判断下列各题中集合 A 是否为集合 B 的子集, 并说明理由.

(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是 } 8 \text{ 的约数}\}$;

(2) $A = \{x \mid x \text{ 是长方形}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是两条对角线相等的平行四边形}\}$.

【解析】 (1) 因为 3 不是 8 的约数, 所以集合 A 不是集合 B 的子集.

(2) 因为若 x 是长方形, 则 x 一定是两条对角线相等的平行四边形, 所以集合 A 是集合 B 的子集.

【练习 1】 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集.

【解析】 集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集有: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

【练习 2】 用适当的符号填空:

(1) a _____ $\{a, b, c\}$; (2) 0 _____ $\{x \mid x^2 = 0\}$; (3) \emptyset _____ $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$;

(4) $\{0, 1\}$ _____ N ; (5) $\{0\}$ _____ $\{x \mid x^2 = x\}$; (6) $\{2, 1\}$ _____ $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

【解析】 (1) 元素 a 属于集合 $\{a, b, c\}$, 故 $a \in \{a, b, c\}$.

(2) 元素 $x = 0$ 满足 $x^2 = 0$, 故 $0 \in \{x \mid x^2 = 0\}$.

(3) 因为 $x^2 + 1 = 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 时无解, 故 $\emptyset = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$

(4) 因为 0, 1 均属于自然数, 故集合 $\{0, 1\} \subseteq N$

(5) 因为 $x^2 = x \Rightarrow x = 0, 1$, 故 $\{0\} \subseteq \{x \mid x^2 = x\}$.

(6) 因为 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根为 $x = 1, 2$. 故 $\{2, 1\} = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

故答案为: (1). \in (2). \in (3). $=$ (4). \subseteq (5). \subseteq (6). $=$

【练习 3】 判断下列两个集合之间的关系: (1) $A = \{x \mid x < 0\}$, $B = \{x \mid x < 1\}$;

(2) $A = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6z, z \in \mathbf{N}\}$;

(3) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ 是 } 4 \text{ 与 } 10 \text{ 的公倍数}\}$, $B = \{x \mid x = 20m, m \in \mathbf{N}_+\}$.

【解析】(1)根据数轴可知, $A = \{x | x < 0\}$ 表示 $x = 0$ 左边的数的集合, $B = \{x | x < 1\}$ 表示 $x = 1$ 左边的数的集合,故 $A \subseteq B$.

(2) $A = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{N}\}$ 表示 3 的整数倍 $\dots -6, -3, 0, 3, 6 \dots$,

$B = \{x | x = 6z, z \in \mathbf{N}\}$ 表示 6 的整数倍 $\dots -12, -6, 0, 6, 12 \dots$.故 $A \supseteq B$.

(3) $A = \{x \in \mathbf{N}, | x \text{ 是 4 与 10 的公倍数}\}$ 即 20 的正整数倍, $B = \{x | x = 20m, m \in \mathbf{N}_+\}$ 也表示 20 的正整数倍.故 $A = B$

【知识梳理】

一、集合间的基本关系基本概念

1. 如果集合 A 中_____元素都是集合 B 中的元素, 称集合 A 为集合 B 的子集.

符号表示为_____.

2. 如果集合 $A \subseteq B$, 但存在元素_____, 则称集合 A 是集合 B 的真子集.

符号表示为_____.

3. Venn 图: 用平面上_____的内部代表集合, 这种图称为 Venn 图.

4. 集合的相等: 若_____且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

5. 空集: _____元素的集合, 叫做空集. 符号表示为: _____.

规定: 空集是任何集合的_____, 空集是任何非空集合的_____.

二、子集的性质

1. 任何一个集合是它本身的_____, 即 $A \subseteq A$;

2. 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq C$, 那么_____

【课后作业】

1. 选用适当的符号填空:

(1) 若集合 $A = \{x | 2x - 3 < 3x\}$, $B = \{x | x \geq 2\}$, 则 -4 _____ B , -3 _____ A , $\{2\}$ _____ B ,

B _____ A

(2) 若集合 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, 则 1 _____ A , $\{-1\}$ _____ A , \emptyset _____ A , $\{1, -1\}$ _____ A ;

(3) $\{x | x \text{ 是菱形}\}$ _____ $\{x | x \text{ 是平行四边形}\}$; $\{x | x \text{ 是等边三角形}\}$ _____ $\{x | x \text{ 是等腰三角形}\}$

【解析】(1) 集合 $A = \{x | 2x - 3 < 3x\} = \{x | x > -3\}$, $B = \{x | x \geq 2\}$, $A \supseteq B$

(2) 集合 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$

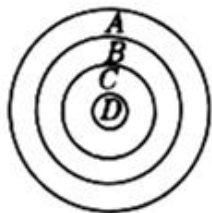
(3) $\{x | x \text{ 是菱形}\} \subseteq \{x | x \text{ 是平行四边形}\}$; $\{x | x \text{ 是等边三角形}\} \subseteq \{x | x \text{ 是等腰三角形}\}$.

2. 指出下列各集合之间的关系，并用 *Venn* 图表示：

$A=\{x|x \text{ 是四边形}\}$, $B=\{x|x \text{ 是平行四边形}\}$, $C=\{x|x \text{ 是矩形}\}$, $D=\{x|x \text{ 是正方形}\}$.

【解析】 根据四边形，平行四边形，矩形，正方形的范围关系得到答案.

各集合之间的关系为 $D \subset C \subset B \subset A$ 用 *Venn* 图表示如图所示：



3. 举出下列各集合的一个子集：

(1) $A=\{x|x \text{ 是立德中学的学生}\}$; (2) $B=\{x|x \text{ 是三角形}\}$;

(3) $C=\{0\}$; (4) $D=\{x \in \mathbb{Z} | 3 < x < 30\}$.

【解析】 (1) $\{x|x \text{ 是立德中学的女生}\}$ (2) $\{x|x \text{ 是直角三角形}\}$ (3) $\{0\}$ (4) $\{4,5,6\}$

4. 在平面直角坐标系中，集合 $C=\{(x,y)|y=x\}$ 表示直线 $y=x$ ，从这个角度看，集合

$D=\left\{(x,y) \left| \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+4y=5 \end{cases} \right. \right\}$ 表示什么？集合 C, D 之间有什么关系？

【解析】 集合 $D=\left\{(x,y) \left| \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+4y=5 \end{cases} \right. \right\}$ 表示直线 $2x-y=1$ 与直线 $x+4y=5$ 交点的集合，

即 $D=\{(1,1)\}$. $D \subseteq C$

5. 请解决下列问题：

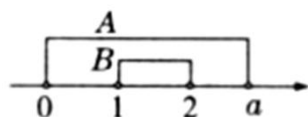
(1) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $P=\{1, a\}$, $Q=\{-1, -b\}$ ，若 $P=Q$ ，求 $a-b$ 的值；

(2) 已知集合 $A=\{x|0 < x < a\}$, $B=\{x|1 < x < 2\}$ ，若 $B \subseteq A$ ，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1) 由于 $P=Q$ ，所以 $a=-1$ ，且 $-b=1$ ， $\therefore a-b=0$.

(2) $\because A=\{x|0 < x < a\}$, $B=\{x|1 < x < 2\}$ ，且 $B \subseteq A$ ， $\therefore a \geq 2$

如图所示.



4.3 集合的基本运算（2 课时）

初中	高中
实数的运算	集合的运算
加	
减	并集
乘	交集
除	补集

【探究一】并集

观察下面的集合，类比实数的加法运算，你能说出集合 C 与集合 A, B 之间的关系吗？

$$(1) A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 7\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

$$(2) A = \{x|x \text{ 是有理数}\}, B = \{x|x \text{ 是无理数}\}, C = \{x|x \text{ 是实数}\}.$$

集合 C 是由所有属于集合 A 或属于 B 的所有元素组成的.

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，

记作： $A \cup B$ （读作：“ A 并 B ”）即： $A \cup B = \{x|x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$

Venn 图表示



【例 1】 设 $A = \{4, 5, 6, 8\}$, $B = \{3, 5, 7, 8\}$, 求 $A \cup B$.

【解析】 $A \cup B = \{4, 5, 6, 8\} \cup \{3, 5, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$

【例 2】 设集合 $A = \{x|-1 < x < 2\}$, 集合 $B = \{x|1 < x < 3\}$, 求 $A \cup B$.

【解析】 $A \cup B = \{x|-1 < x < 2\} \cup \{x|1 < x < 3\} = \{x|-1 < x < 3\}.$

如图 1.3-2, 还可以利用数轴直观表示例 2 中求并集 $A \cup B$ 的过程.



图 1.3-2

思考：下列关系式成立吗？

$$(1) A \cup A = A \quad (2) A \cup \emptyset = A$$

【解析】 成立

【探究二】交集

观察下面的集合，集合 A , B 与集合 C 之间有什么关系吗？

$$(1) A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{3, 5, 8, 12\}, \quad C = \{8\}.$$

$$(2) A = \{x | x \text{ 是立德中学今年在校的女同学}\},$$

$$B = \{x | x \text{ 是立德中学今年在校的高一年级同学}\},$$

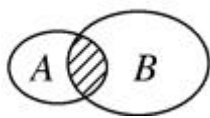
$$C = \{x | x \text{ 是立德中学今年在校的高一年级女同学}\}.$$

集合 C 是由那些既属于集合 A 且又属于集合 B 的所有元素组成的.

一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集，

记作： $A \cap B$ （读作：“ A 交 B ”）即： $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$

Venn 图表示



【例 3】立德中学开运动会，设

$$A = \{x | x \text{ 是立德中学高一年级参加百米赛跑的同学}\},$$

$$B = \{x | x \text{ 是立德中学高一年级参加跳高比赛的同学}\},$$

求 $A \cap B$.

【解析】 $A \cap B$ 就是立德中学高一年级中那些既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学组成的集合. 所以，

$$A \cap B = \{x | x \text{ 是立德中学高一年级既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学}\}.$$

【例 4】 设平面内直线 l_1 上点的集合为 L_1 ，直线 l_2 上点的集合为 L_2 ，试用集合的运算表示 l_1 , l_2 的位置关系.

【解析】 平面内直线 l_1 , l_2 可能有三种位置关系，即相交于一点、平行或重合.

$$(1) \text{ 直线 } l_1, l_2 \text{ 相交于一点 } P \text{ 可表示为 } L_1 \cap L_2 = \{\text{点 } P\};$$

$$(2) \text{ 直线 } l_1, l_2 \text{ 平行可表示为 } L_1 \cap L_2 = \emptyset;$$

$$(3) \text{ 直线 } l_1, l_2 \text{ 重合可表示为 } L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2.$$

思考：下列关系式成立吗？

$$(1) A \cap A = A \quad (2) A \cap \emptyset = \emptyset.$$

【解析】 成立

【练习】

1. 设 $A = \{3, 5, 6, 8\}$, $B = \{4, 5, 7, 8\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

【解析】由交集定义知: $A \cap B = \{5, 8\}$; 由并集定义知: $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

2. 设 $A = \{x | x^2 - 4x - 5 = 0\}$, $B = \{x | x^2 = 1\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$.

【解析】 $\because A = \{x | x^2 - 4x - 5 = 0\} = \{x | (x-5)(x+1) = 0\} = \{-1, 5\}$, $B = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$

$\therefore A \cup B = \{-1, 1, 5\}$, $A \cap B = \{-1\}$

3. 设 $A = \{x | x \text{ 是等腰三角形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是直角三角形}\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

【解析】由交集定义知: $A \cap B = \{x | x \text{ 是等腰直角三角形}\}$

由并集定义知: $A \cup B = \{x | x \text{ 是等腰三角形或直角三角形}\}$

4. 设 $A = \{x | x \text{ 是幸福农场的汽车}\}$, $B = \{x | x \text{ 是幸福农场的拖拉机}\}$, 求 $A \cup B$.

【解析】由并集定义知: $A \cup B = \{x | x \text{ 是幸福农场的汽车或拖拉机}\}$

【探究三】补集

在研究问题时, 我们经常需要确定研究对象的范围, 在不同范围研究同一问题, 可能有不同的结果.

如, 在下面范围内解方程 $(x-2)(x^2-3) = 0$

(1) 有理数范围:

(2) 实数范围:

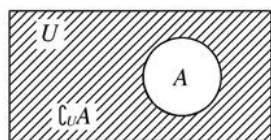
1. 全集

一般地, 如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素, 那么就称这个集合为全集, 通常记作 U .

2. 补集

对于全集 U 的一个子集 A , 由全集 U 中所有不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集, 简称为集合 A 的补集, 记作: $C_U A$ 即: $C_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$

Venn 图表示



【例 5】 设 $U = \{x | x \text{ 是小于 9 的正整数}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$,

求 $C_U A$, $C_U B$.

【解析】 根据题意可知, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 所以

$$C_U A = \{4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$C_U B = \{1, 2, 7, 8\}.$$

【例 6】 设全集 $U = \{x | x \text{ 是三角形}\}$, $A = \{x | x \text{ 是锐角三角形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是钝角三角形}\}$, 求 $A \cap B$,

$$C_U(A \cup B).$$

【解析】 根据三角形的分类可知

$$A \cap B = \emptyset,$$

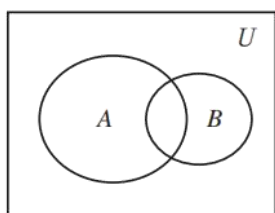
$$A \cup B = \{x | x \text{ 是锐角三角形或钝角三角形}\},$$

$$C_U(A \cup B) = \{x | x \text{ 是直角三角形}\}.$$

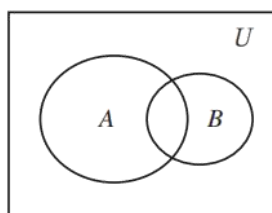
【练习】

1. 已知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, 求 $A \cap (C_U B)$, $(C_U A) \cap (C_U B)$.
2. 设 $S = \{x | x \text{ 是平行四边形或梯形}\}$, $A = \{x | x \text{ 是平行四边形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是菱形}\}$, $C = \{x | x \text{ 是矩形}\}$, 求 $B \cap C$, $C_S B$, $C_S A$.
3. 图中 U 是全集, A, B 是 U 的两个子集, 用阴影表示:

- (1) $(C_U A) \cap (C_U B)$; (2) $(C_U A) \cup (C_U B)$.



(1)



(2)

(第 3 题)

【知识梳理】

1. 并集的概念

一般地, 由所有属于集合 A 属于集合 B 的元素所组成的集合, 称为集合 A 与 B 的并集 (Union set).

记作: _____ (读作: “ A 并 B ”), 即: $A \cup B =$ _____.

2.交集的概念

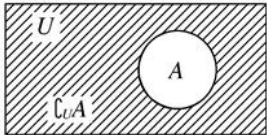
一般地,由属于集合 A 属于集合 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(intersection set). 记作: _____ (读作: “ A 交 B ”), 即: $A \cap B =$ _____.

3.补集的概念

(1)全集定义: 如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的_____, 那么就称这个集合为全集.

记法: 全集通常记作 U .

(2)补集

文字语言	对于一个集合 A , 由全集 U 中_____的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集, 记作_____
符号语言	$C_U A =$
图形语言	

【课后作业】

1. 已知集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

【解析】由题得: 集合 $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\} = \{x | x \geq 3\}$, 而集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 3 \leq x < 4\}$, $A \cup B = \{x | x \geq 2\}$.

2. 设 $A = \{x | x \text{ 是小于 9 的正整数}\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$. 求

$A \cap B, A \cap C, A \cap (B \cup C), A \cup (B \cap C)$.

【解析】 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$,
 $\therefore A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A \cap C = \{3, 4, 5, 6\}$, $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

3. 已知集合 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 2 < x < 10\}$,

求 $C_U (A \cup B)$, $C_U (A \cap B)$, $(C_U A) \cap B$, $A \cup (C_U B)$.

【解析】因为 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 2 < x < 10\}$,
 所以 $A \cup B = \{x | 2 < x < 10\}$, 所以 $C_U (A \cup B) = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 10\}$;
 因为 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 2 < x < 10\}$,

所以 $A \cap B = \{x | 3 \leq x < 7\}$, 所以 $\check{\partial}_R(A \cap B) = \{x | x < 3 \text{ 或 } x \geq 7\}$;

因为 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 2 < x < 10\}$,

所以 $\check{\partial}_R A = \{x | x < 3 \text{ 或 } x \geq 7\}$, 所以 $(\check{\partial}_R A) \cap B = \{x | 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$;

因为 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 2 < x < 10\}$,

所以 $\check{\partial}_R B = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 10\}$, 所以 $A \cup (\check{\partial}_R B) = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } 3 \leq x < 7 \text{ 或 } x \geq 10\}$.